Neunter Artikel.

Einige allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Aufgaben

von Federigo Enriques in Bologna.

Dem Einzelstudium der verschiedenen, in den vorangehenden Artikeln behandelten Fragen lassen wir einige allgemeine Bemerkungen synthetischer Natur über die geometrischen Aufgaben folgen, wobei wir hier und da Betrachtungen höherer Art berühren wollen. Wenn diese Bemerkungen sich auch an das, was bei Gelegenheit dieser oder jener Gruppe von Aufgaben gesagt war, nicht streng anschließen, so halten wir es doch nicht für unnütz, diese Fragen in ihrer Gesamtheit ins Auge zu fassen, um leichter zu einem vergleichenden Urteil über jene Untersuchungen zu gelangen.

§ 1. Praktischer Zweck der geometrischen Untersuchungen.

Die graphische Lösung der Konstruktionsaufgaben bildet ein Hauptziel der Geometrie. Auch wo dieses Ziel bei dem Fortschreiten der theoretischen Untersuchung gewissermaßen vergessen zu sein scheint, läßt sich sein leitender Einfluß auf diese Untersuchung doch leicht erkennen.

Zunächst kann jeder geometrische Satz, indem er einige Beziehungen zwischen den Elementen einer Figur aufstellt, als eine Bedingung betrachtet werden, die bei der Konstruktion dieser Figur erfüllt werden soll. So sagt z. B. die Umkehrung des Pythagoräischen Lehrsatzes aus, daß, wenn das Quadrat über der Strecke a der Summe der Quadrate über den Strecken b und c gleich sein soll, das Dreieck, das die Strecken a, b, c zu Seiten hat, rechtwinklig sein muß, wobei der von b und c eingeschlossene Winkel der rechte Winkel ist; hiermit ist eine Bedingung gegeben, der man genügen muß, wenn man zwei Quadrate addieren oder subtrahieren will, und

die Erfüllung dieser Bedingung ist auch zur Lösung dieser Konstruktionsaufgabe hinreichend.

Im allgemeinen wird die Untersuchung der Eigenschaften einer geometrischen Figur, die schließlich in analoger Weise Bedingungen für ihre Konstruktion aufstellt, erst dann als vollendet betrachtet werden können, wenn die zwischen ihren Elementen entdeckten Beziehungen zu erkennen gestatten, wie diese Figur durch die willkürliche Annahme einiger von ihnen bestimmt ist. Es handle sich z. B. um ein reguläres Polyeder von zwölf Seiten (ein Dodekaeder). Zunächst erkennt man, daß seine Seiten Fünfecke sind und daß in seinen Ecken je drei Kanten zusammenstoßen; aber man wird nur dann sagen können, daß die Konstruktion des Polyeders wirklich bestimmt ist, wenn klar geworden ist, daß bei seiner orthogonalen Projektion auf die Ebene einer seiner Seiten die Projektionen der Ecken zwei konzentrische reguläre Zehnecke bilden von der Art, daß der Radius des um das größere beschriebenen Kreises um so viel größer ist als der Radius des um das kleinere beschriebenen Kreises als der größere Abschnitt dieses nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius beträgt.[1])

§ 2. Unbestimmte Aufgaben.

Die Aufgaben der Geometrie beziehen sich auf ebene und auf räumliche Figuren; aber die Konstruktionen im Raume lassen sich nach der einfachen und allgemeinen Methode der rechtwinkligen Projektion (Monge) immer auf Konstruktionen in der Ebene zurückführen, und zu dieser Zurückführung kann man in den verschiedenen besonderen Fällen auch leicht durch geeignete direkte Betrachtungen gelangen, wie dies z. B. bei der Verdoppelung des Würfels im siebenten Artikel zu sehen war.

Daher werden wir im folgenden immer Fragen der ebenen Geometrie ins Auge fassen.

Die geometrischen Aufgaben können bestimmt und unbestimmt sein. Man betrachtet als bestimmt diejenigen der Aufgaben, in denen es sich darum handelt, aus gegebenen Elementen und Beziehungen eine Figur zu konstruieren, bei welchen die die Lösung der Aufgabe bildende Figur sich nicht mehr bewegen oder kontinuierlich ändern kann; dagegen nennt man unbestimmt diejenigen Aufgaben, die unendlich viele, einer kontinuierlichen Änderung fähige Lösungen haben, so daß es noch möglich ist, innerhalb gewisser Grenzen ein

---

1) Vgl. z. B. F. Enriques, Lezioni di Geometria descrittiva, Bologna 1902, pg. 106.

weiteres Element oder eine weitere Beziehung anzugeben, der die geforderte Figur genügen soll.

Im besonderen gehören der ersten Kategorie der bestimmten Aufgaben alle diejenigen Aufgaben an, welche eine Lösung oder eine endliche Zahl von Lösungen haben; aber bestimmt ist z. B. auch die Aufgabe, auf einer Geraden von einem gegebenen Punkte aus eine Strecke abzutragen, die der Länge eines Bogens vom Radius 1, dessen trigonometrische Tangente man kennt, gleich ist, da die unendlich vielen Lösungen, die sich hierbei ergeben, eine diskrete Reihe bilden (wenn y eine Strecke ist, die die Aufgabe löst, so ist $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = y \pm n\pi$).

Dagegen sind nach der Definition diejenigen Aufgaben unbestimmt, in denen nur nach der Größe der Elemente (Strecken, Winkel usw.) einer Figur gefragt ist, da es dann gleichzeitig mit einer Lösung noch alle diejenigen gibt, die man durch eine Bewegung der Figur erhält. Es ist jedoch zweckmäßig, den Umfang dieser Gattung von Aufgaben zu beschränken, indem man von derjenigen Unbestimmtheit, die nur mit der Lage der Figur zu tun hat, absieht; d. h. man fügt den vorgeschriebenen Bedingungen noch die Lage irgend eines Elementes dieser Figur (z. B. einer ihrer Strecken) hinzu, so daß dann ihre Bewegung in der Ebene unmöglich ist.

Nun können die geometrischen Aufgaben im allgemeinen in der Weise umgewandelt werden, daß die Daten Punkte der Ebene sind und daß die unbekannten Elemente auch Punkte sind, die zu jenen in gewissen vorgeschriebenen Beziehungen stehen (vgl. Art. IV, § 7). Wenn dann die unbekannten Punkte sich auf Linien oder Flächen kontinuierlich bewegen können, so ist die Aufgabe unbestimmt; bestimmt im entgegengesetzten Falle.

Der elementarste Typus der unbestimmten Aufgaben besteht darin, eine Linie zu beschreiben, deren Punkte (im Hinblick auf gewisse Daten) einer vorgeschriebenen Bedingung genügen. Eine solche Aufgabe ist praktisch als gelöst zu betrachten, wenn ein (aus einem Systeme von einem gewissen Freiheitsgrade bestehendes) Instrument gegeben ist, mit dem man die verlangte Linie beschreiben kann, und wenn man außerdem mit dem Instrumente selbst oder mit anderen gegebenen Instrumenten die Elemente bestimmen kann, die man kennen muß, um diese Linie beschreiben zu können.

Es handle sich z. B. darum, den Ort der Punkte zu konstruieren, von denen aus man eine gegebene Strecke AB unter einem gegebenen Winkel α sieht: dieser Ort besteht aus zwei Kreisbogen, die man mit dem Zirkel schlagen kann, sobald man den Mittelpunkt und den Radius

der Kreise bestimmt hat, und dies kann man (wie bekannt) mit dem Zirkel selbst (oder mit dem Zirkel und dem Lineal) tun.

Daher erfordert die Aufgabe der Konstruktion einer Linie im allgemeinen:

1) eine Umformung der geometrischen Eigenschaften, denen die Punkte der Linie genügen sollen, in der Art, daß man eine mechanische Erzeugung dieser Linie erkennt;

2) ein Instrument, um diese Erzeugung auszuführen;

3) die Bestimmung derjenigen Elemente der Linie, an welche die genannte Erzeugung gebunden ist.

In diesem Sinne kann die Aufgabe der Konstruktion einer Linie immer als lösbar betrachtet werden, da dem Forscher reiche Gelegenheit bleibt, für den Zweck geeignete Instrumente zu erdenken. So machen z. B. verschiedene mechanische Erzeugungsweisen der Ellipse die Konstruktion eines Instrumentes, das zu ihrer Beschreibung dienen kann, in mannigfacher Weise möglich (Ellipsenzirkel des Leonardo da Vinci, Art. VII); so kann z. B. die Eigenschaft einer algebraischen Parabel n^{ter} Ordnung, die Integralkurve einer Parabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu sein, dazu benutzt werden, diese Kurve (indem man von der Geraden ausgeht) durch $n-1$ aufeinanderfolgende Anwendungen des Integraphen zu beschreiben, usw.

Die Sache stellt sich anders dar, wenn es sich darum handelt, eine Linie mit vorgeschriebenen Instrumenten zu konstruieren. Dann ist sofort leicht zu erkennen, ob die verlangte Linie zu der Klasse derjenigen Linien gehört, welche sich mit den gegebenen Instrumenten erzeugen lassen, oder nicht; und wenn sie nicht dazu gehört, dann erscheint die Aufgabe in dem oben angegebenen Sinne unlösbar.

Dies ist z. B. der Fall, wenn gefordert wird, mit dem Lineal und dem Zirkel den Ort der Punkte zu konstruieren, die von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden gleich weit entfernt sind; dieser Ort ist eine Parabel und gehört also nicht zu der Klasse von Linien (Geraden und Kreisen), die mit den gegebenen Instrumenten konstruierbar sind.

In ähnlichen Fällen kann an Stelle einer unmittelbaren Konstruktion der Linie eine Konstruktion durch genügend nahe Punkte gefordert sein, und dies ist als eine annähernde Lösung der gestellten Aufgabe zu betrachten.

Bei dem angeführten Beispiele wird die Parabel punktweise konstruiert, indem man einen variablen Kreis, dessen Mittelpunkt sich in dem gegebenen Punkte (dem Brennpunkte) befindet, mit der Parallelen

zu der Geraden (der Leitlinie) schneidet, die von ihr um den Radius des Kreises entfernt ist und sich auf derjenigen Seite von ihr befindet, auf der der genannte Punkt liegt.

In analoger Weise kann man mit dem Zeichenwinkel von 90° den Kreis, der einen gegebenen Durchmesser AB hat, punktweise konstruieren, und derselbe Kreis läßt sich sogar allein mit dem Lineal punktweise konstruieren, wenn auch der zu AB normal stehende Durchmesser gegeben ist (vgl. Art. III).

Die Konstruktion einer Linie durch Punkte führt tatsächlich die unbestimmte Aufgabe auf eine (theoretisch beliebig große) Reihe bestimmter Aufgaben zurück, die von zum Teil willkürlichen Elementen abhängen. Analytisch gesprochen handelt es sich dabei um die Parameterdarstellung einer Linie $f(x, y) = 0$ mit Hilfe von Funktionen eines Parameters t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

für jeden willkürlich gegebenen Wert von t müssen die Strecken x und y konstruiert werden.[1])

§ 3. Bestimmte Aufgaben.

Wir haben gesehen, daß die typische unbestimmte Aufgabe der Konstruktion einer Linie, wenn es sich nicht um die mechanische Erfindung eines geeigneten Instrumentes handelt, auf die Lösung einer Reihe bestimmter Aufgaben zurückkommt.

Andererseits besteht zwischen der einen und den anderen Aufgaben ein Band gegenseitiger Unterordnung, da man die Punkte, die eine bestimmte Aufgabe lösen, im allgemeinen (nach der Methode der Örter) als Schnittpunkte von Linien erhält, die sich mit

1) Hier zeigt sich, daß man bei vorgeschriebenen Konstruktionen die Konstruktion einer Linie durch Punkte nicht immer verlangen kann. Zum Beispiel erfordert die lineale Konstruktion durch Punkte (Art. IV), daß die Funktionen φ und ψ rational sind und daß daher die Kurve $f(x, y) = 0$ algebraisch ist vom Geschlecht Null (Clebsch). Jedoch beziehen sich diese Bemerkungen auf den Fall, daß man die Bestimmung des allgemeinen Punktes der Linie von einer und derselben vorgeschriebenen Konstruktion abhängen lassen will, die auf Elemente, von denen eins willkürlich ist, angewendet wird. Viel schwieriger ist es zu entscheiden, ob eine Kurve eine unendliche Reihe einander beliebig naher Punkte enthält, von denen jeder durch eine eigene, mit gegebenen Hilfsmitteln ausführbare Konstruktion konstruierbar ist. Zum Beispiel ist die Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte vom Geschlecht 1, und sie kann nicht durch Punkte in dem zuerst genannten Sinne lineal konstruiert werden, weil es unmöglich ist, ihre Koordinaten durch rationale Funktionen eines Parameters auszudrücken; jedoch kann sie unendlich viele Punkte mit rationalen Koordinaten enthalten, und es ist zweifelhaft, ob in die Nachbarschaft eines jeden von ihnen unendlich viele fallen (vgl. auch den Art. VII).

unseren Instrumenten beschreiben lassen. In diesem Sinne werden bei der Lösung der bestimmten Aufgaben die Instrumente, mit denen man Linien beschreiben kann, wie z. B. das Lineal, der Zirkel usw., beständig gebraucht.

Jedoch finden neben dieser Art von Instrumenten auch Instrumente von anderer Beschaffenheit (die aus Systemen bestehen, die eine gegebene geometrische Beziehung verwirklichen), die in unmittelbarer Weise gewisse bestimmte Konstruktionen liefern, Anwendung. Von dieser Art sind z. B. der Streckenübertrager, der aus einem Stabe oder einem Papierstreifen besteht, der rechte und der schiefe Zeichenwinkel, das Lineal mit zwei parallelen Kanten (vgl. die Art. III und IV) — Instrumente, die in verschiedener Weise zur unmittelbaren Konstruktion von Punkten oder Geraden, die zu gegebenen Punkten oder Geraden in gewissen einfachen Beziehungen stehen, benutzt werden können.

Aber bei einer ersten Betrachtung der Aufgaben darf man dieser Art von Instrumenten eine sekundäre Bedeutung beilegen, und wenn wir im folgenden ausdrücklich die bestimmten Aufgaben ins Auge fassen, so wollen wir an dem bei ihrer Lösung vorherrschenden Gesichtspunkte festhalten, die unbekannten Punkte als Schnittpunkte von Linien aufzusuchen. Andererseits lassen sich die mit der Anwendung jener Instrumente zusammenhängenden Unterscheidungen und Klassifikationen sehr gut an die Betrachtungen und Einteilungen anknüpfen, die aus dem oben genannten vorherrschenden Gesichtspunkte sich ergeben.

§ 4. Das ökonomische Prinzip bei der Lösung der Aufgaben.

Jede mögliche Aufgabe (jede Aufgabe, die Lösungen hat) kann mit Hilfe von zweckentsprechenden Instrumenten gelöst werden, und die Phantasie kann in der Erfindung mechanischer Hilfsmittel, die die genannte Lösung liefern, ins Unendliche gehen.

Aber (nach den allgemeinen Machschen Ansichten) fordert die Wissenschaft nicht nur die Lösung der gestellten Aufgaben, sondern auch die ökonomischste Lösung. Und hier handelt es sich nicht nur um die Ökonomie des Denkens, sondern auch um die Ersparnis an komplizierter mechanischer Fabrikation oder um die Ökonomie der Arbeit für jedes gegebene Instrument, usw.

Wir wollen daher zusehen, welchen leitenden Einfluß der Gesichtspunkt der Ökonomie auf dem Gebiete der geometrischen Konstruktionsaufgaben ausgeübt hat.

§ 5. Zweck der Klassifikation der Aufgaben.

Die ungezügelte Phantasie sucht für jede besondere Konstruktion das einfachste Ausführungsmittel. Die Wissenschaft sucht die Aufgaben zu klassifizieren und in Gruppen zu ordnen in der Weise, daß in jeder Gruppe dieselben Instrumente gebraucht werden. Dies ist eine erste ökonomische Forderung, wenn man die Aufgaben in ihrer Gesamtheit betrachtet.

§ 6. Gesichtspunkte für die Klassifikation.

Andererseits bieten sich drei Hauptgesichtspunkte dar, nach denen man die Aufgaben in natürlicher Weise klassifizieren kann.

Diese Gesichtspunkte für die Klassifikation gehen aus der systematischen (bei dieser Art Aufgaben, wie gesagt, vorherrschenden) Untersuchung hervor, wie man die Lösung der bestimmten Aufgaben durch den Schnitt von Linien erhält.

Daher lassen sich diese Aufgaben klassifizieren:

1) nach der mechanischen Einfachheit der Instrumente, die zum Beschreiben der die Lösung liefernden Linien geeignet sind;

2) nach der geometrischen Einfachheit dieser Linien;

3) nach der analytischen Einfachheit der Gleichungen, von denen die Aufgabe bei Anwendung der cartesischen Methode abhängt.

Für den ersten (von Newton eingenommenen) Gesichtspunkt kommen z. B. gleich hinter den mit dem Kreise (Zirkel) lösbaren Aufgaben diejenigen, die durch die Konchoide des Nikomedes gelöst werden (vgl. Art. VII), während für den zweiten Gesichtspunkt die Lösung der Aufgaben durch Kegelschnitte einfacher erscheint.

Der geometrische Gesichtspunkt, der die Einfachheit der Linien, von denen man die Lösung einer Aufgabe abhängen lassen kann, ins Auge faßt, findet bis zu einem gewissen Grade sein Gegenstück in dem analytischen Gesichtspunkte (des Descartes), der die Beschaffenheit der Gleichungen, von denen die Bestimmung der Unbekannten abhängt, betrachtet. Für diesen Gesichtspunkt entsteht die Unterscheidung der Aufgaben in algebraische und transzendente, und die algebraischen Aufgaben lassen sich nach ihrem Grade klassifizieren.

Es ist bemerkenswert, daß die Gruppen von Aufgaben, die bei der analytisch-geometrischen Klassifikation die ersten Stellen einnehmen (die Aufgaben ersten und zweiten Grades), auch bei Berück-

sichtigung des Mechanismus der zur Lösung nötigen Konstruktion die einfachsten sind.[1])

Über den Wert der angeführten Gesichtspunkte sind die folgenden Bemerkungen zu machen.

Der mechanische Gesichtspunkt erscheint zweckentsprechender, wenn man (indem man sich theoretisch die Bedingung der Genauigkeit auferlegt) nur Linien anwenden will, die sich mechanisch beschreiben lassen; wenn man dagegen den Gebrauch von punktweise konstruierten Linien zuläßt, so wird die Leichtigkeit der Konstruktion im allgemeinen zu der geometrischen Einfachheit dieser Linien und daher (wenn man eine geeignete analytische Darstellung wählt) zu der analytischen Einfachheit der darstellenden Gleichungen in direktem Verhältnisse stehen.

Es ist auch zu bemerken, daß die Frage der Klassifikation der Konstruktionsaufgaben sich verschieden darstellt, je nachdem es sich darum handelt, die schon gelösten oder die noch zu lösenden Aufgaben zu ordnen. Wenn dem ersten Zwecke der mechanische Gesichtspunkt besser entspricht, so scheint dagegen für den zweiten der geometrische und vor allem der analytische geeigneter zu sein; in der Tat, wenn eine Aufgabe nur ausgesprochen ist, so ist es im allgemeinen schwierig, sofort zu entscheiden, welche mechanischen Hilfsmittel sie erfordern könnte, während man gewisse geometrische Eigenschaften der Linien, die sich nach der Methode der Örter zu ihrer Lösung geeignet zeigen, leichter erkennen und vor allem die Gleichungen dieser Linien mit Hilfe der analytischen Geometrie leicht bilden wird.

§ 7. Qualitative und quantitative Gesichtspunkte bei der Beurteilung der Lösung einer Aufgabe.

Andererseits ist es zweckmäßig, daß verschiedene Gesichtspunkte bei der Klassifikation der Aufgaben vorherrschen, da diesen gegenüber verschiedene Forderungen auftreten können.

So kann das allgemeine Prinzip der ökonomischsten Lösung verstanden werden:

---

1) Wir wollen auch bemerken, daß (neben einer Klasse transzendenter Aufgaben) sich alle algebraischen Aufgaben mit dem Lineal und dem Integraphen lösen lassen. Da man die Aufgaben n^{ten} Grades auf die Schnitte von Geraden und Parabeln n^{ter} Ordnung zurückführen kann, so erfordert ihre Lösung $(n-1)$-mal hintereinander die Anwendung des Integraphen.

1) in einem qualitativen Sinne, wenn die Forderung darin besteht, eine gewisse Konstruktion mit gegebenen Instrumenten statt mit anderen auszuführen;

2) in einem quantitativen Sinne, wenn die schnellste Konstruktion gefordert wird, für die die kleinste Zahl von Operationen nötig ist.

Natürlich ist der quantitative Gesichtspunkt dem qualitativen untergeordnet. Von vornherein kann man es nicht für gleichgültig halten, ob man eine Gerade zieht oder einen Kreis beschreibt, ob man das Lineal oder den Zirkel oder den Zeichenwinkel benutzt. Also muß man die Operationen, die man mit jedem Instrumente ausführt, besonders zählen, wie es eben die Lemoinesche „Géométrographie“ lehrt. Aber nachträglich kann man zwischen der Zahl der Operationen, die mit einem gegebenen Instrumente ausgeführt wurden, und der Zahl der Operationen, die mit einem anderen Instrumente ausgeführt wurden, für die praktisch dieselbe Zeit erforderlich ist, ein gewisses Gleichwertigkeitsverhältnis aufstellen.

Andererseits gibt es Fälle, in denen aus dem oder jenem Grunde die Operation, für die ein gewisses Instrument nötig ist, immer vorteilhafterweise durch irgend eine Zahl von Operationen ersetzt werden kann, die mit einem anderen Instrumente ausgeführt werden; dann ist der qualitative Gesichtspunkt vorherrschend. Für ihn kommt es zu der systematischen Untersuchung, ob es möglich ist, alle Aufgaben einer gewissen Klasse mit einigen sehr einfachen Instrumenten und unter Benutzung einer gewissen auf dem Zeichenblatte gegebenen fundamentalen Linie oder Figur zu lösen; hier wird die Konstruktion dieser Linie (selbst wenn man sie durch Punkte erhalten kann) als so schwierig betrachtet, daß es zweckmäßig ist, sie nur einmal auszuführen. Dies tritt z. B. ein, wenn man mit Poncelet und Steiner die Aufgaben zweiten Grades allein mit Hilfe des Lineals und eines festen fundamentalen Kreises oder die Aufgaben dritten Grades allein mit Hilfe des Lineals, des Zirkels und einer festen Parabel löst, usw. (vgl. Art. III, IV, VII).

§ 8. Relativer Wert der zur Lösung benutzten Instrumente.

Der wichtigste Schluß, der aus den verschiedenen Klassifikationen der Aufgaben nach den verschiedenen Instrumenten hervorgeht, besteht in einem vergleichenden Urteile über den Wert dieser Instrumente.

Da zu jedem Instrumente (dessen Benutzungsart feststehen soll) ein „Körper“ von Aufgaben, die mit ihm lösbar sind, gehört, so

kann sein Wert nach der Ausdehnung dieses Körpers beurteilt werden. Wenn zu zwei Instrumenten oder Instrumentengruppen derselbe Körper gehört, so können sie als gleichwertig betrachtet werden, wie dies zum Beispiel für die bestimmten Konstruktionen mit dem Zirkel und dem Lineal mit zwei parallelen Kanten usw. der Fall ist (vgl. Art. II, III, IV). Sobald jedoch der Körper der Aufgaben, die mit einem gewissen Instrumente A lösbar sind, den Körper der Aufgaben, die mit einem anderen Instrumente B lösbar sind, enthält, dann hat das Instrument A einen größeren Wert als B. So hat z. B. der Zirkel einen größeren Wert als das als Streckenabtrager benutzte geteilte Lineal (Art. IV), und dieses hat seinerseits einen größeren Wert als der nur zur Übertragung eines rechten Winkels benutzte Zeichenwinkel (vgl. Art. III, § 12 und § 14, Anmerkung).

Aber zwei Instrumente können auch einen verschiedenen und nicht vergleichbaren Wert haben; dies tritt ein, wenn die zu ihnen gehörigen Aufgabenkörper nicht ineinander enthalten sind, sei es nun, daß sie einen „Unterkörper" gemeinsam haben, oder daß keine Aufgabe existiert, die beiden Körpern gemeinsam ist. Ein Beispiel für den ersten Fall würde man erhalten, wenn man (auf Grund der im vierten Artikel aufgestellten Gesichtspunkte) das, was der Zirkel liefert, mit dem vergleichen würde, was man mit einem Winkeltrisektor zusammen mit dem Lineal erhalten kann.

§ 9. Genauigkeit der Konstruktionen.

Die Einfachheit der Konstruktionen und die Größe des Körpers der Aufgaben, die mit einem gegebenen Instrumente lösbar sind, sind nicht die einzigen Gesichtspunkte, von denen man bei der Beurteilung der Nützlichkeit des Instrumentes ausgehen muß. Man muß dazu auch die Genauigkeit dieser Konstruktionen ins Auge fassen. Von dieser Seite angesehen ist z. B. die Mascheronische Geometrie des Zirkels schätzenswert (Art. II).

Die Frage der Genauigkeit gibt zu einigen Überlegungen Anlaß.

Theoretisch spricht man von genauen und annähernden Konstruktionen; praktisch haben alle Konstruktionen nur einen annähernden Wert.

Wie kann man den Genauigkeitsgrad oder die Annäherung, die man durch eine der Theorie nach genaue Konstruktion erhält, beurteilen?

Dies ist eine Aufgabe, die mit den Gesichtspunkten zu tun hat, die F. Klein in seiner Vorlesung „Anwendung der Differential- und

Integralrechnung auf Geometrie" (autogr.), Leipzig 1901, entwickelt hat. Man kann die Frage mathematisch dadurch beantworten, daß man die Aussagen der geometrischen Sätze, die analytisch durch Gleichungen ausgedrückt werden, systematisch in der Weise umformt, daß an Stelle dieser Gleichungen Ungleichheiten treten. So verwandelt sich z. B. der Satz „die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich" in einen Satz von folgender Form „wenn zwei Seiten a, b eines Dreiecks sich um weniger als ε unterscheiden, so unterscheiden sich die gegenüberliegenden Winkel α, β um weniger als ψ, wo ψ eine (leicht angebbare) Funktion von ε ist, die mit ε unendlich klein wird".[1]) Wenn man dann in einer Konstruktion einen Satz wie den oben ausgesprochenen anwendet, so hat man vor allem anzunehmen, daß die theoretisch als gleich gegebenen Größen nur für die Sinne gleich sind, sich aber um eine Größe ε, die unmittelbar von dem benutzten Instrumente abhängt, unterscheiden, und dann den Genauigkeitsgrad τ abzuschätzen, mit dem die konstruierten Elemente den gestellten Bedingungen genügen.

Wenn τ von derselben Ordnung wie ε, d. h. mit unseren Instrumenten und den Sinnen nicht zu schätzen ist, dann ist die Lösung der Aufgabe praktisch genau.

Daher kann derselbe praktische Genauigkeitsgrad bisweilen auch durch die Lösung einer Aufgabe erreicht werden, die einfacher als die gestellte ist und ihr sehr nahe kommt. Dem ökonomischen Gesichtspunkte entspricht es dann, in diesen Fällen die theoretisch annähernde Lösung der Aufgabe jener genauen vorzuziehen.

Jedoch darf man den Vorteil der theoretisch genauen Lösungen nicht verkennen, da in ihnen, im Gegensatz zu den annähernden Lösungen, keine Veranlassung zu einem systematischen Fehler gegeben wird, dessen Wiederholung sich in einer großen Zahl von Fällen immer mehr bemerkbar machen würde.

Dessenungeachtet kann man wohl sagen, daß in der größeren Zahl der Fälle es nötig oder vorteilhaft ist, sich mit dem Aufsuchen annähernder Lösungen zu begnügen. Aber hinsichtlich dieser unterscheidet F. Klein zweckmäßigerweise zwischen der Annäherung, die einen von vornherein gegebenen Fehler vernachlässigt, und der systematischen Annäherung, bei der man, wofern man nur eine genügend große Zahl von Operationen ausführt, einen so großen Genauigkeitsgrad erhält, als man wünscht.

---

1) Genau ist in absolutem Werte $\sin\beta - \sin\alpha = \frac{\varepsilon \sin\alpha}{a}$.

Das ganze Meßverfahren, auf Grund dessen man die Aufgaben auf analytischem Wege löst, ist im wesentlichen eine in großem Maßstabe angewandte Methode systematischer Annäherung; durch besondere Hilfsmittel erhält man dann vorteilhafte Konstruktionen der Strecken (oder anderer Elemente), deren Maß gegeben ist (vgl. z. B. Art. VI). Von Konstruktionen, die bis auf einen gegebenen Fehler genau sind, sind bemerkenswerte Beispiele in den Artikeln II und VII enthalten.

§ 10. Beurteilung der Methoden für die Lösung der Aufgaben.

Gelegentlich der Klassifikation der Aufgaben haben wir schon auf die verschiedenen Gesichtspunkte hingewiesen, unter denen die gelösten und die noch zu lösenden Aufgaben erscheinen. Wenn man nun die Aufgaben als Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung näher betrachtet, so erhält der Gesichtspunkt der Lösungsmethode eine fundamentale Bedeutung. Noch vor der Wahl zwischen verschiedenen möglichen Lösungen tritt hier das ökonomische Prinzip als vergleichender Maßstab für die Methoden auf, insoweit nämlich diese uns gestatten, die Lösung der gestellten Aufgaben auf leichtere Weise (d. h. mit geringerem Denkaufwand) zu erreichen.

Nun, welche Methoden muß man für die ökonomischsten halten? Wenn man die bei dem Forscher vorausgesetzte wissenschaftliche Vorbereitung ins Auge faßt, so würde eine Methode um so ökonomischer genannt werden müssen, je elementarer sie ist. Aber die elementareren Methoden, die jedem, der nur eine dürftige Zahl von Kenntnissen besitzt, zugänglich sind, bieten in den verschiedenen Fällen keine leitenden Gesichtspunkte allgemeiner Art dar, und daher erfordert ihre Anwendung jedesmal eine kleine geistige Anstrengung. Die Lösung auf elementarem Wege ist also nur im Hinblick auf den einzelnen Fall die ökonomischste; im Hinblick auf die Gesamtheit ist es der Mühe wert, eine größere wissenschaftliche Vorbereitung zu erwerben, um einen Führer allgemeiner Art zu erhalten und nicht bei jedem Schritte auf eine neue Schwierigkeit zu stoßen.

Der Fortschritt der Wissenschaft bietet gerade, wenn man die zu lösenden Aufgaben in ihrer Gesamtheit ins Auge faßt, eine Vervollkommnung der Methoden im ökonomischen Sinne dar, ebenso wie der von der Maschine getriebene Webstuhl eine Ersparnis für die Industrie bedeutet, die eine große Menge Stoff zu fabrizieren hat.

§ 11. Entwickelung der Methoden.

Es ist interessant zu bemerken, wie die höchsten Methoden, die die moderne Geometrie bei der Behandlung der Aufgaben benutzt, unter dem Antrieb der Forderung der Ökonomie aus der Entwickelung der elementaren hervorgegangen sind.

Betrachten wir die Methode der Örter, die sich bei der Lösung zahlreicher Aufgaben zunächst darbietet. Die elementare Geometrie benutzt sie in den engen Grenzen, die durch die Kenntnis weniger besonderer Linien bezeichnet sind. Wenn man sich die Bedingung auferlegt, nicht über die Betrachtung der Geraden und des Kreises hinauszugehen, so ist man mit der Anwendung der Methode zu Ende, sobald eine der Bedingungen der Aufgabe einen Kegelschnitt als Ort ergibt. Die Notwendigkeit, diese Grenzen zu erweitern, bot sich schon den Alten dar; aber die wirklich allgemeine Erweiterung wurde erst von Descartes geleistet, als auf Grund der analytischen Darstellung der Kurven jede Kurve, deren Gleichung hingeschrieben ist, in einem gewissen Sinne als beschreibbar angesehen werden konnte.

Die auf diesem Wege entstandene analytische Methode bietet einen systematischen Gesichtspunkt für die Lösung der Aufgaben dar und verwirklicht daher die größte Ökonomie in der Gesamtheit. Es ist richtig, daß sie nicht in jedem einzelnen Falle gleich durchsichtig ist und nicht immer auf die schnellste und einfachste Lösung führt. Es ist ferner richtig, daß sie die Schwierigkeit nicht vollständig löst, wenn man über diejenigen Typen von Gleichungen hinausgeht, deren Lösung mit Instrumenten von genau bekannter Benutzungsart ausgeführt wird. Aber diese Schwierigkeit wird (wie wir schon andeuteten) durch den Umstand aufgewogen, daß die Wurzeln einer Gleichung wenigstens mit jeder beliebigen Annäherung konstruiert werden können, und die Sätze der Analysis über Entwicklungen in Potenzreihen oder Kettenbrüche dienen diesem Zwecke in wunderbarer Weise.

Die zweite allgemeine Methode für die Lösung der Aufgaben stützt sich auf den Begriff der Transformation. Und in dem ersten Artikel ist bereits gezeigt worden, daß diese Methode auch auf dem beschränkten Gebiete der Elementargeometrie nützliche Anwendungen finden kann.

Aber wenn man in der Untersuchung der Vorteile, um derentwillen man die Transformationen vornimmt, fortfährt, so kommt man naturgemäß zu einer Erweiterung ihres Gebietes: jeder Gruppe von Eigenschaften der Figuren entspricht eine Gruppe von Transformationen,

die sie ungeändert läßt, und umgekehrt. So werden die Projektivitäten, die Transformationen durch reziproke Radien, die Cremona-Transformationen usw. nacheinander studiert und führen auf die systematische Entwicklung der Geometrie unter einem besonderen Gesichtspunkte.[1])

Die Beurteilung dieser Entwicklungen würde uns zu weit über das Ziel, das diesem Artikel gesetzt ist, hinausführen. Wir werden uns daher auf wenige Betrachtungen über den Wert der Transformationen zur Lösung der Konstruktionsaufgaben beschränken und wollen uns dabei möglichst in der Nähe der von der Elementargeometrie betrachteten Dinge halten.

§ 12. Benutzung der Transformationsmethoden: Vorteile der Lage.

Wie in dem ersten Artikel zu sehen ist, entspricht die erste Benutzung der Transformation dem Zwecke, die Figur, mit der man operiert, oder einige ihrer Teile in eine bessere Lage zu bringen. Dieser Zweck kann entweder durch eine Bewegung der Ebene erreicht werden oder durch eine Transformation, die irgend eines der Elemente der Figur ändert, aber das, was für die Konstruktion wesentlich ist, ungeändert läßt.

Wir wollen im speziellen zwei Anwendungen dieses Prinzips verzeichnen:

1. Die Zurückführung der Konstruktionen auf die Grenzen eines gegebenen Blattes, die sich je nach dem Falle am besten mit Hilfe der Homothetie (der perspektiven Ähnlichkeit) oder der Homologie (der Zentralkollineation oder perspektiven Kollineation) oder der Inversion in bezug auf einen Kreis erreichen läßt. Die Homothetie bietet den Vorteil dar, daß bei ihr die Winkel und die Verhältnisse der Strecken erhalten bleiben und daß daher im besonderen ein Kreis durch einen Kreis ersetzt wird; aber sie bringt die unendlich fernen Elemente nicht in endliche Entfernung und gestattet daher nicht, in den vorgeschriebenen Grenzen alle linealen Konstruktionen, besonders diejenigen, bei denen es sich um Parallele handelt, auszuführen. Hierzu nimmt man zweckmäßigerweise eine allgemeine Homologie zu Hilfe. Die im dritten Artikel erhaltene Zurückführung der linealen Konstruk-

1) Vgl. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872; abgedruckt: Math. Ann. 43 (das sogenannte Erlanger Programm).

tionen auf die Grenzen des Zeichenblattes gründet sich im wesentlichen auf eine homologische Transformation.

2. Die Ersetzung einer Linie durch eine andere bei der Aufgabe, die Schnittpunkte zu finden, ist auch von dem Standpunkte aus, den wir hier einnehmen, eine glänzende Anwendung der Transformationen.

Ein einfaches Beispiel wurde im dritten Artikel gegeben, wo die Homothetie zur Transformation irgend eines (angegebenen, aber nicht beschriebenen) Kreises in einen beschriebenen fundamentalen Kreis angewandt und so die Möglichkeit gezeigt wurde, die Benutzung des Zirkels durch die eines festen Kreises (wenn das Lineal gegeben ist) zu ersetzen.

Allgemeiner gesagt gestattet uns eine Kollineation, das Aufsuchen der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer Geraden auf das Aufsuchen der Schnittpunkte eines anderen beliebig gewählten Kegelschnittes zurückzuführen, und dies bildet noch mehr als einen einfachen Vorteil der Lage, da man den gegebenen Kegelschnitt in einen besonderen Kegelschnitt, z. B. in einen Kreis, transformieren kann. Und zu diesem Zwecke genügt eine homologische Transformation, und man kann also mit einer solchen die Aufgabe, irgend einen (angegebenen, aber nicht beschriebenen) Kegelschnitt mit einer Geraden zu schneiden, mit dem Zirkel lösen.[1]) (Vgl. § 13.)

Ein anderes bemerkenswertes Beispiel bezieht sich auf die Möglichkeit, die Schnittpunkte eines Kegelschnittes oder eines Kreises K mit einer Geraden, wenn von K ein beliebig kleiner Bogen beschrieben ist, lineal zu bestimmen. Dazu ist nur eine kollineare Transformation von K in sich selbst anzugeben, von der Art, daß ein (lineal bestimmbarer) Bogen von K, der die unbekannten Punkte enthält, sich in den gegebenen Bogen verwandelt.[2])

§ 13. Herstellung besonderer Figuren.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht schon eine weitere Benutzung der Transformationen hervor. Außer den Vorteilen der Lage kann man mit ihnen noch andere erreichen, indem man die

---

1) Eine elementare Lösung dieser Aufgabe ist in dem siebenten Artikel gegeben worden.

2) Vgl. F. Severi, Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, Circolo Matematico di Palermo 1904.

Es existiert auch ein analoger Satz für die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit Geraden und Kreisen, der von Descartes ausgesprochen und von Henry J. S. Smith (Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, 1868; Coll. math. pap. II, pg. 1—66) bewiesen worden ist.

Figuren in verschiedener Weise auf besondere Fälle zurückführt und vereinfacht. Anwendungen dieser Art bieten sich schon in den elementarsten Fällen dar (Art. I); aber man kommt zu einer ungeheuren Erweiterung dieses Gedankenganges, wenn man über das Gebiet der Ähnlichkeiten hinausgeht.

Die einfachsten Transformationen, die aus der Erweiterung der elementaren hervorgehen, sind im allgemeinen diejenigen, die man durch wiederholte Projektionen der Ebene erhält (Poncelet). Diese projektiven Transformationen kann man innerhalb einer gegebenen Ebene, ohne aus ihr herauszugehen, ausführen, da für sie die charakteristische Eigenschaft, auf Grund deren sie den Namen Kollineation (Möbius) führen, besteht, daß die Geraden erhalten bleiben.

Wenn auf einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, so ist die Konstruktion des (vierten harmonischen) Punktes D, für den

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC}$$

ist, nicht sofort zu ersehen. Eine Projektion macht sie uns deutlich, wenn man die projektive Invarianz des Doppelverhältnisses ins Auge faßt, aus der gerade die bekannte Eigenschaft des Vierecks hervorgeht (Art. III, § 5).

Der Vorteil des Ersatzes der Projektionen durch die kollinearen Konstruktionen in der Ebene zeigt sich, wenn man mit der Figur im Zusammenhange mit ihrer transformierten operieren soll. So haben wir schon darauf hingewiesen, daß die Aufgabe, einen Kegelschnitt mit einer Geraden zu schneiden, auf die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises mit Hilfe einer Kollineation, die man als homologisch voraussetzen darf, zurückkommt.

Zur kollinearen Transformation eines Kegelschnittes C in einen Kreis ist in der Tat nur als Fluchtgerade (der die unendlich ferne Gerade entspricht) eine außerhalb C liegende Gerade a zu nehmen und dafür zu sorgen, daß die auf a durch C erzeugte Involution der konjugierten Punkte in die absolute Involution übergeht; dies geschieht z. B. durch eine Homologie, deren Mittelpunkt den Kreisen gemeinsam ist, welche die durch die konjugierten Punkte der Involution bestimmten Strecken zu Durchmessern haben.

Nun zeigt sich, daß die angegebene Transformation auch gestattet, die Aufsuchung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte auf die der Schnittpunkte eines Kegelschnitts (den man nach Belieben als Ellipse, Hyperbel oder Parabel voraussetzen darf) mit einem Kreise

zurückzuführen. Ferner lernt man auch auf diesem Wege die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte C_1, C_2 mit Hilfe einer vollständig beschriebenen festen Parabel K und des Zirkels. Zu diesem Zwecke ist nur eine Kollineation (die im allgemeinen nicht homologisch sein wird) zu benutzen, die einen der beiden Kegelschnitte, z. B. C_1, in K transformiert, wobei als Fluchtgerade a eine Tangente von C_1, die außerhalb C_2 liegt, zu nehmen ist.

Hieraus geht hervor, daß die mit Kegelschnitten lösbaren Aufgaben (vierten Grades) mit dem Zirkel und einer festen Parabel gelöst werden können.[1])

Dieses Resultat ist übrigens in dem auf anderem Wege erlangten Resultate des siebenten Artikels enthalten, da die Aufgaben vierten Grades auf Grund der bekannten Auflösung der Gleichung vierten Grades sich auf Aufgaben zweiten und dritten Grades zurückführen lassen.

Unter den bemerkenswerten Kollineationen wollen wir die Affinitäten (von Möbius), d. h. die Kollineationen, welche die unendlich ferne Gerade fest lassen, erwähnen; sie werden vorteilhaft bei Aufgaben angewandt, bei denen es sich um Flächen handelt, da sie die charakteristische Eigenschaft haben, Flächen in einem konstanten Verhältnisse zu verwandeln.[2])

Es möge sich z. B. darum handeln, in eine Ellipse ein Parallelogramm von gegebenem Flächeninhalte einzubeschreiben, von dem auch ein Eckpunkt gegeben sein kann. Diese Aufgabe läßt sich durch eine affine Transformation der Ellipse in einen Kreis, die einfach durch eine Homologie mit dem Mittelpunkte im Unendlichen gegeben wird, auf die Aufgabe zurückführen, in einen Kreis ein Rechteck von gegebenem Flächeninhalte einzubeschreiben, und diese letzte Aufgabe wird leicht gelöst, da sie von den Gleichungen

$$xy = a^2, \quad x^2 + y^2 = 4r^2$$

(wo a^2 der gegebene Flächeninhalt und r der Radius des Kreises ist) abhängt. Man findet also für die Seiten des zu konstruierenden Rechtecks:

$$x + y = \pm 2\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{2}}$$

$$x - y = \pm 2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

1) Nach dem oben ausgesprochenen Satze von Descartes-Smith genügt es, einen Bogen der Parabel zu geben.

2) Vgl. z. B. F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1903, pg. 160.

§ 14. Gleichwertigkeit der Hilfsmittel für die Konstruktion.

Das mathematische Denken zeigt in einer fortschreitenden Entwickelung nach dem Abstrakten hin immer mehr die Tendenz, an Stelle der Frage nach der „wirklichen Lösung" die Frage nach der „Lösbarkeit der Aufgaben mit gegebenen Hilfsmitteln", deren Ziele wir bereits erwähnt haben, zu setzen. Mit dieser Gedankenrichtung kommt es zu einer weiteren Auffassung der Leistungsfähigkeit der Transformationen und zu einer neuen Art, sie auf die Konstruktionsaufgaben anzuwenden.

Es sei ein Instrument a gegeben, mit dem man gewisse fundamentale Konstruktionen $A_1, A_2, \ldots$ ausführen kann; diese werden einen Körper (A) von Aufgaben definieren, der mit Hilfe von a lösbar ist.

Man führe nun eine Transformation aus, die die $A_1, A_2, \ldots$ in gewisse neue Konstruktionen $A'_1, A'_2, \ldots$ verwandelt. Der Wert eines Instrumentes a', mit dem man die fundamentalen Operationen $A'_1, A'_2, \cdots$ ausführen kann, wird sich ohne weiteres auf Grund der vorausgesetzten Kenntnisse des Wertes von a messen lassen; in der Tat ist der Körper der mit Hilfe von a' lösbaren Aufgaben der durch die Transformation von (A) erhaltene Körper (A').

Wenn im besonderen der Körper (A') die Operationen $A_1, A_2, \ldots$ enthält, so enthält er den ganzen Körper (A), und darum kann das Instrument a' das Instrument a ersetzen.

Man kommt genau zu diesem Schlusse, wenn man mit dem Instrumente a' die erwähnte Transformation ausführen kann, weil es dann die Zurückführung der Konstruktionen $A_1, A_2, \ldots$ auf die Konstruktionen $A'_1, A'_2, \ldots$ möglich macht.

Die Transformation bietet daher ein Mittel dar, um über die Gleichwertigkeit gegebener Hilfsmittel für die Konstruktion zu urteilen.

Ein einfaches Beispiel dieser Art wurde im zweiten Artikel gegeben. Da eine Transformation durch reziproke Radien sich allein mit dem Zirkel ausführen läßt und da sie die aus einem Kreise und den Geraden einer Ebene gebildete Figur in ein System von Kreisen transformiert, so folgt, daß man mit dem Kreise allein alle diejenigen Konstruktionen ausführen kann, die man mit dem Lineal und einem festen Kreise erhält, d. h. (nach dem Resultate von Poncelet-Steiner) alle diejenigen Konstruktionen, welche man mit dem Lineal und dem Zirkel ausführen kann. In ähnlicher Weise wird die aus einer festen Parabel und den durch ihren Scheitel gehenden Kreisen der Ebene

gebildete Figur durch eine Inversion in die aus einer rationalen Kurve dritter Ordnung und den Geraden gebildete Figur transformiert, und da diese Transformation sich allein mit dem Lineal ausführen läßt, wenn die metrischen Dinge der Ebene (z. B. durch ein Quadrat) gegeben sind, so schließt man, daß diejenigen Aufgaben dritten Grades, die durch die Schnittpunkte einer Parabel mit den durch ihren Scheitel gehenden Kreisen lösbar sind, auch allein mit dem Lineal gelöst werden können, wenn in der Ebene eine feste rationale Kurve dritter Ordnung und ein Quadrat, oder auch, wenn eine Zissoide und der Mittelpunkt ihres Erzeugungskreises gegeben sind, da man in diesem Falle ein Quadrat konstruieren kann (vgl. Art. VII, § 19).

Ein anderes lehrreiches Beispiel von etwas verschiedener Art ist folgendes:

Man betrachte in der Ebene die Polarität in bezug auf einen Kreis, die eine Transformation von Punkten in Gerade und von Geraden in Punkte darbietet. Durch diese lineal konstruierbare Polarität wird die Operation „einen Kreis mit einer Geraden zu schneiden“ in die Operation „durch einen Punkt die Tangenten an einen Kreis zu ziehen“ transformiert Und da man mit Hilfe der ersten Operation zusammen mit den Operationen „einen Punkt anzugeben“ und „eine Gerade zu ziehen“ alle Aufgaben zweiten Grades und im besonderen die Aufgabe, durch einen Punkt die Tangenten an einen Kreis zu ziehen, lösen kann, so folgt, daß dieselben Aufgaben mit Hilfe der zweiten Operation lösbar sind, die mit einem Lineal mit zwei parallelen Kanten ausgeführt werden kann.[1]) Dieses Resultat ist in andrer Weise im dritten Artikel gefunden worden.

§ 15. Lösung von Aufgaben mit Hilfe der Doppelpunkte einer Beziehung.

Die Transformationen oder Beziehungen zwischen den Punkten einer Ebene oder einer Geraden finden bei der Lösung von Aufgaben auch eine besondere Anwendung, wenn nämlich die unbekannten Punkte als Doppelpunkte einer Beziehung auftreten.

Das einfachste Beispiel dieser Art ist im dritten Artikel unter dem Namen Methode der Versuche angeführt worden. Bei den dort betrachteten Aufgaben stellten sich die unbekannten Punkte als

1) Vgl. F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1903, pg. 266. Die Möglichkeit, diese Operation mit einem Lineal mit zwei Kanten von begrenzter Länge praktisch auszuführen, geht aus den Ausführungen des § 12 hervor (vgl. Severi l. c.).

Doppelpunkte einer Projektivität auf der Geraden dar, die durch drei nicht gelungene Versuche bestimmt wurde.

Im allgemeinen hat man, wenn unbekannte Punkte (auf einer Geraden oder in der Ebene) sich als Doppelpunkte einer Beziehung, deren Konstruktion bekannt ist, darstellen, wenigstens den Weg, sich den Lösungen durch fortgesetzte Approximationen zu nähern, indem man die Konstruktion dieser Beziehung wiederholt.[1])

Es möge hier ein Beispiel für die Anwendung dieser Methode folgen, bei dem eine Beziehung von höherer Art als die Projektivität auftritt.

Es handle sich darum, zwischen zwei gegebene Gerade a und b eine Strecke von gegebener Länge einzuschieben, deren Verlängerung durch einen Punkt O gehen soll (Art. VII).

Die Versuche, die Aufgabe mit Lineal und Zirkel zu lösen, führen offenbar auf eine Beziehung [2, 2], in der jedem Punkte von a zwei von b entsprechen und umgekehrt. Projiziert man von O aus die Gerade b auf die Gerade a, so erhält man auf dieser eine Beziehung [2, 2], die vier Doppelpunkte hat, und diese lösen die Aufgabe.

Wir wollen noch eine andere Anwendung dieser Methode erwähnen, nämlich die Anwendung auf die Konstruktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung $f_3(x) = 0$, wovon schon im siebenten Artikel die Rede war.

Auf Grund einer einfachen geometrischen Konstruktion von Graßmann (einer Verallgemeinerung der Theorie der vierten harmonischen Punkte[2])) kann man die drei Punkte einer Geraden, die die genannten Wurzeln zu Abszissen haben, als Doppelpunkte einer Beziehung [1, 2] (der Polarität in bezug auf das Tripel) betrachten, die dadurch entsteht, daß man die Punkte der Geraden auf die Paare einer Involution J (oder auf die Strahlen eines Büschels, die die durch zwei feste Punkte gehenden Kreise, die auf der Geraden die Paare der Involution ausschneiden, in einem dieser Punkte berühren) projektiv

---

1) Aus diesem Näherungsverfahren zur Erreichung der Doppelpunkte einer Projektivität auf der Geraden geht die bekannte Entwickelung einer quadratischen Irrationalzahl in einen periodischen Kettenbruch hervor. Das analoge Näherungsverfahren für die Doppelpunkte einer ebenen Kollineation entspricht der Verallgemeinerung des genannten Algorithmus für die kubischen Irrationalzahlen, usw. (Jacobi, Minkowski).

Da man n Punkte der Geraden, die durch eine Gleichung n^{ten} Grades dargestellt werden, als Doppelpunkte einer Beziehung $[1, n-1]$ betrachten kann, so kann man eine Darstellung der Irrationalzahl vom Grade n durch ein beständig fortgesetztes Verfahren erhalten, das in der Wiederholung einer rationalen Operation vom Grade $n-1$ besteht.

2) Vgl. Cremona, Einführung in eine Theorie der ebenen Kurven, deutsch von Curtze, Greifswald 1865.

bezieht. Wenn man dann die genannte Beziehung auf einen Kegelschnitt C (z. B. auf einen Kreis) projiziert und dabei das Projektionszentrum O auf der Kurve annimmt, so wird die Involution auf C durch die Geraden eines Büschels P ausgeschnitten werden, das zu O projektiv sein wird. Die beiden projektiven Büschel O und P werden dann einen Kegelschnitt erzeugen, dessen Schnittpunkte mit C die Lösungen der gegebenen kubischen Gleichung liefern.

Man setze dagegen in der Ebene eine Kurve dritter Ordnung C mit einem Doppelpunkte O als gegeben voraus. Die in O an C gezogenen Tangenten werden unsere Gerade in zwei Punkten A, B schneiden. Wir können auf die Gerade eine projektive Transformation in der Weise anwenden, daß die (transformierte) Involution J das Paar A, B enthält und der Punkt P, der diesem Paare in der gegebenen Beziehung entspricht, eine beliebige Lage annimmt, über die wir noch verfügen wollen. Nun projiziere man von O aus auf die Kurve dritter Ordnung C die Gerade AB. Die Projektionen der Paare von J werden auf C eine Involution J' bilden, und es ist leicht zu beweisen, daß die Paare von J' mit einem festen Punkte P' der Kurve dritter Ordnung in einer geraden Linie liegen. Wir können annehmen, daß der Punkt P' die Projektion von P ist. Dann geht die auf unserer Geraden gegebene Beziehung [1, 2] in eine Perspektivität zwischen den Strahlenbüscheln O und P' über. Die Perspektivitätsachse trifft die Kurve in den Doppelpunkten. Man erhält auf diese Weise einen neuen Beweis der Möglichkeit, die Wurzeln einer Gleichung dritten Grades mit Hilfe der Schnittpunkte einer festen rationalen Kurve dritter Ordnung mit einer Geraden zu konstruieren (vgl. § 14 und Art. VII, § 19).

Schluß.

Wir haben von mannigfachen Standpunkten aus die Fortschritte klargelegt, die durch die Anschauungen der modernen Algebra und Geometrie in der Lösung der Konstruktionsaufgaben hervorgebracht worden sind. Für die Gesamtheit dieser Aufgaben ging daraus, außer einem sichern Urteil über die Möglichkeit der Lösung mit gegebenen Mitteln, Sparsamkeit in den Konstruktionen und in den Lösungsmethoden hervor.

Jedoch bleibt den Euklidischen Methoden ein bewundernswerter didaktischer Wert, denn man versteht die abstrakten Begriffe schlecht, wenn man nicht den Weg noch einmal geht, den der Menschengeist

bis zu ihnen zurückgelegt hat, und es bleibt ihnen ihre innigere Berührung mit der Form, in der die praktischen Aufgaben gewöhnlich auftreten. Daher wollen wir von dem, was die alten Geometer uns gelehrt haben, nichts beiseite legen und wenden uns an eine breitere und höhere wissenschaftliche Ausbildung nur, um uns die Verhältnisse jener elementaren Geometrie klar zu machen, deren bewundernswerte Einzelheiten sehr wohl dem Glanze der modernen allgemeinen Begriffe entsprechen.

Berichtigungen.

S. 42, Z. 21 v. o. statt anM lies Man
S. 98, Z. 16 v. u. statt ; lies :
S. 112, Z. 3 v. u. und S. 113, Z. 3 v. o. statt $\frac{O}{O}\frac{M}{E}$ lies $\frac{OM}{OE}$
S. 113, Z. 11 v. o. statt $\frac{X'}{O'}\frac{E'}{E'}$ lies $\frac{X'E'}{O'E'}$
S. 117, Z. 15 v. o. statt $\frac{O'}{O'}\frac{M_x}{E_x}$ lies $\frac{OM_x}{OE_x}$
S. 120, Z. 1 v. u. statt Beziehnng lies Beziehung
S. 140, Z. 3 v. o. statt im § 9 lies in den §§ 8—10
S. 181, Z. 5 v. u. statt mit der Abszisse lies von der Abszisse
S. 270, Z. 8 v. u. statt arithmetich lies arithmetisch
S. 308, Z. 14 v. o. statt algebraischen lies algebraischer
S. 319, Z. 11 v. u. statt $\gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$ lies $\gamma_{n-1}(n-1)! + \cdots + \gamma_1 1!$



